

PROBLEMAS DE OPTIMIZACION DE SISTEMAS ECONOMICOS CON CRITERIOS
CUADRATICOS Y CONTROLES MONOTONOS
UN ALGORITMO PARA SU SOLUCION NUMERICA

Laura Aragoné

PROMAR- Instituto de Matemática Beppo Levi
Avenida Pellegrini 250 (T.E. 217998-TELEX: 41817 CIROESAR)
Universidad Nacional Rosario
(2000) Rosario - Argentina

Resumen: En este trabajo se presenta un algoritmo numérico para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada a la función de costo óptimo de problemas de control de sistemas económicos que involucran la explotación de recursos no renovables. También estos problemas aparecen en el control de sistemas monetarios cuando sólo se considera en el mismo la inyección de recursos. En ambos casos los controles utilizados son monótonos (no crecientes o no decrecientes), pudiendo ser incluso discontinuos. Un estudio casi completo de este problema y de la caracterización teórica de su solución ha sido realizado en [1]. En ese artículo la solución del problema queda reducida al tratamiento de una inecuación cuasivariacional elíptica en el intervalo $[0, T]$. En este trabajo se realiza una extensión de la metodología presentada en [7] al análisis y solución numérica de esta inecuación, dando un algoritmo de resolución, propiedades de convergencia del procedimiento de discretización y los resultados computacionales obtenidos al resolver con este método un ejemplo presentado en [1].

1-Introducción

Se considera un problema de control óptimo de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias. El sistema es unidimensional y el intervalo de tiempo en consideración es finito; el funcional a optimizar es cuadrático y toma la siguiente forma explícita

$$\min_{p(\cdot)} \int_0^T e^{-\alpha s} \left\{ h [y(s)-f(s)]^2 + k [p(s)-f'(s)]^2 \right\} ds \quad (1)$$

siendo

$$\frac{dy}{dt} = p(t) \quad (2)$$

p es la variable de control y pertenece a $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

El problema de minimización estudiado es con condiciones iniciales libres, por lo que realmente el mínimo debe buscarse con respecto a $y(0)$, $p(\cdot)$

Se tiene en consecuencia que y es una variable no decreciente, de allí el nombre de controles monótonos que reciben este tipo de problemas, ya que puede considerarse a y como la variable de control.

α es el coeficiente de actualización, h y k son coeficientes de ponderación y f es una trayectoria deseable a perseguir.

Este tipo de problemas aparecen en cuestiones económicas como el control de la política monetaria, donde p representa la inyección de circulante e y es el stock monetario. Problemas similares tienen lugar cuando se considera el control de la explotación de recursos no renovables, como yacimientos de petróleo o minerales, bosques, política pesquera, etc.

En [1] se ha presentado la caracterización de la solución de este problema utilizando la metodología de inecuaciones variacionales en espacios de Sobolev.

Definiendo

$$Y(t) = \int_0^t y(s) ds \quad F(t) = \int_0^t f(s) ds \quad (3)$$

se obtiene la siguiente ecuación diferencial de optimalidad para Y

$$Y'' + (Y - F + F'')' = 0 \quad \text{en } (0, T) \quad (4)$$

con condiciones de frontera

$$Y(0) = 0 \quad (5)$$

$$Y(T) = F(T) \quad (6)$$

Estas condiciones pueden ser obtenidas también directamente aplicando el principio de máximo de Pontriaguin. En particular (6) es consecuencia directa de considerar la optimización bajo condiciones iniciales libres para $y(0)$.

La solución deseada de (4) posee la siguiente propiedad de minimalidad:

Teorema:

$$Y \leq u \text{ en } [0, T], \quad \forall u \in U \quad (7)$$

siendo

$$U = \left\{ u \in H^2[0, T] / u'' \leq 0, \quad u'' - u \leq F'' - F, \quad u(0) \geq 0, \quad u(T) \geq F(T) \right\} \quad (8)$$

La demostración está contenida en [1].

El conjunto U es llamado el conjunto de supersoluciones. En base a la caracterización dada por el teorema para el elemento Y , el problema original queda reducido a determinar el elemento mínimo de U . Para hallarlo numéricamente se desarrolla un procedimiento de discretización aplicando la metodología presentada en [7]. El método está basado en el empleo de elementos finitos lineales y en el uso de discretizaciones débiles de las condiciones que intervienen en (8).

II El problema discretizado y sus soluciones

Se realiza una aproximación externa del espacio $H^2[0, T]$ utilizando elementos finitos lineales (elementos de $H^1[0, T]$), (llamamos W^h al conjunto de estos elementos). En consecuencia estas funciones aproximantes quedan determinadas por los valores que asume en los nodos de la discretización. En este caso unidimensional estos valores serán (para una partición uniforme de $[0, T]$):

$$u^h(k\Delta) \quad k=0, \dots, n_h \quad \Delta = \frac{T}{n_h} \quad (9)$$

La discretización de las restricciones que definen U determinan un conjunto de supersoluciones discretas U^h que tiene la siguiente forma:

$$U^h = \left\{ u^h \in W^h / u^h \text{ verifica (11)-(14)} \right\} \quad (10)$$

$$u^h(0) \geq 0 \quad (11)$$

$$u^h(n_h \Delta) \geq F(T) \quad (12)$$

$$u^h(k\Delta) \geq \frac{u^h((k+1)\Delta) + u^h((k-1)\Delta)}{2} \quad k=1, \dots, n_h-1 \quad (13)$$

$$u^h(k\Delta) \geq \left(\frac{u^h((k+1)\Delta) + u^h((k-1)\Delta)}{\Delta^2} + F(k\Delta) - F''(k\Delta) \right) \frac{\Delta^2}{2+\Delta^2} \quad k=1, \dots, n_h-1 \quad (14)$$

La función Y^h , elemento mínimo de U^h está caracterizado por las condiciones:

$$Y^h(0) = 0 \quad (15)$$

$$Y^h(n_h \Delta) = F(T) \quad (16)$$

$$Y^h(k\Delta) = \max \left\{ \frac{Y^h((k+1)\Delta) + Y^h((k-1)\Delta)}{2}, \left(\frac{Y^h((k+1)\Delta) + Y^h((k-1)\Delta)}{\Delta^2} + F(k\Delta) - F''(k\Delta) \right) \frac{\Delta^2}{2+\Delta^2} \right\} \\ k=1, \dots, n_h-1 \quad (17)$$

Se introduce el operador $P: W^h \rightarrow W^h$ de la siguiente forma

$$(Pw^h)(0) = 0 \quad (18)$$

$$(Pw^h)(n_h \Delta) = F(T) \quad (19)$$

$$(Pw^h)(k\Delta) = \max \left\{ \frac{w^h((k+1)\Delta) + w^h((k-1)\Delta)}{2}, \left(\frac{w^h((k+1)\Delta) + w^h((k-1)\Delta)}{\Delta^2} + F(k\Delta) - F''(k\Delta) \right) \frac{\Delta^2}{2+\Delta^2} \right\} \\ (20)$$

Este operador es monótono, y deja invariante al conjunto U^h . También puede demostrarse que si bien P no es contractivo, si lo es la potencia n_h del mismo.

Llamando $\tilde{Y}^h$ al único punto fijo de P^{n_h} es decir llamando $\tilde{Y}^h$ a la única solución de la ecuación:

$$\tilde{Y}^h = P^{n_h} \tilde{Y}^h \quad (21)$$

resulta también $\tilde{Y}^h = Y^h$ y por lo tanto también solución de la ecuación

$$Y^h = P_h Y^h$$

(22)

El elemento mínimo de U^h es entonces la solución de la ecuación (22). Queda así caracterizada la solución del problema discretizado y al mismo tiempo el operador P_h permite definir un algoritmo para calcular Y^h .

III) Solución del problema discretizado

La demostración del teorema del punto fijo nos sugiere el siguiente algoritmo para computar Y^h .

ALGORITMO

Paso 0 : Tomar $Y_0 \in W^h$, hacer $\nu=0$

Paso 1 : Hacer $Y_{\nu+1} = P_h Y_\nu$

Paso 2 : Si es $Y_\nu = Y_{\nu+1}$ ir a 3, sino, hacer $\nu=\nu+1$ e ir a 1.

Paso 3 : Hacer $Y^h = Y_\nu$ y parar.

Este algoritmo termina en un número finito de pasos o genera una sucesión de elementos Y_ν que converge a Y^h , verificándose la siguiente desigualdad:

$$\|Y_\nu - Y^h\| \leq (\tilde{\beta})^{\tilde{\nu}} \|Y_0 - Y^h\|, \quad \tilde{\beta} < 1$$

siendo $\tilde{\nu} = \text{int}(\frac{\nu}{n_h})$.

Puede observarse también, en virtud de las propiedades de P_h , que si se elige Y_0 perteneciente a U^h , la sucesión Y_ν verifica:

$$Y_\nu \in U^h$$

$$Y_\nu \geq Y_{\nu+1} \geq Y^h$$

IV) Convergencia de las soluciones aproximadas

La solución Y^h del problema discretizado converge uniformemente hacia la función Y solución de (4) cuando $n_h \rightarrow \infty$ ($\Delta \rightarrow 0$).

En efecto y en virtud del tipo de discretización empleada, se obtiene que es válido un principio de máximo discreto lo que implica la convergencia uniforme de las aproximaciones (ver [4], [6]). Pudiéndose demostrar además que

$$\|Y^h - Y\| \leq Ch$$

V) Ejemplo de aplicación

Se considera uno de los problemas dados en [1] donde:

$$T = \pi$$

$$f(t) = \sin(t)$$

Luego

$$F(t) = 1 - \cos(t)$$

La solución numérica se calculó tomando una partición del $[0, \pi]$ con $n_H = 100$

La solución exacta es

$$Y(t) = \begin{cases} ct & \text{si } t \in (0, x) \\ c_1 \left(e^t - e^{2\pi-t} \right) + 1 - \cos(t) & \text{si } t \in (x, \pi) \end{cases}$$

siendo

$x = 1.753508 \dots$ el punto de conmutación de la política óptima ($p=0$ en $(0, x)$)

$$c = 0.7775233 \dots$$

$$c_1 = -0.0020895877 \dots$$

El error máximo obtenido entre la solución exacta Y y la numérica Y^h es $7.37 \cdot 10^{-2}$
 En la gráfica I se muestra la solución numérica Y^h del problema y en la gráfica II el error $Y - Y^h$

Conclusiones

En este trabajo, siguiendo la sugerencia expuesta en [1], pag. 305 se ha realizado una aplicación de la metodología establecida en [8] al problema de control óptimo continuo con criterios cuadráticos y controles monótonos. El método está basado en la aproximación externa del espacio de Sobolev $H^2[0, T]$ por medio de elementos finitos lineales y discretizaciones que satisfacen un PMD, constituyendo así una extensión del procedimiento presentado en [5], [7], para solucionar problemas de control óptimo estocásticos modelizados con difusiones continuas.

El procedimiento es absolutamente convergente, obteniéndose además convergencia

monótona en el caso de elegir como punto inicial para el algoritmo iterativo una supersolución discreta Y^h_0 . En virtud de la regularidad especial $(C^{2,\alpha})$ de la solución exacta Y se demuestra una estimación del error de discretización del tipo:

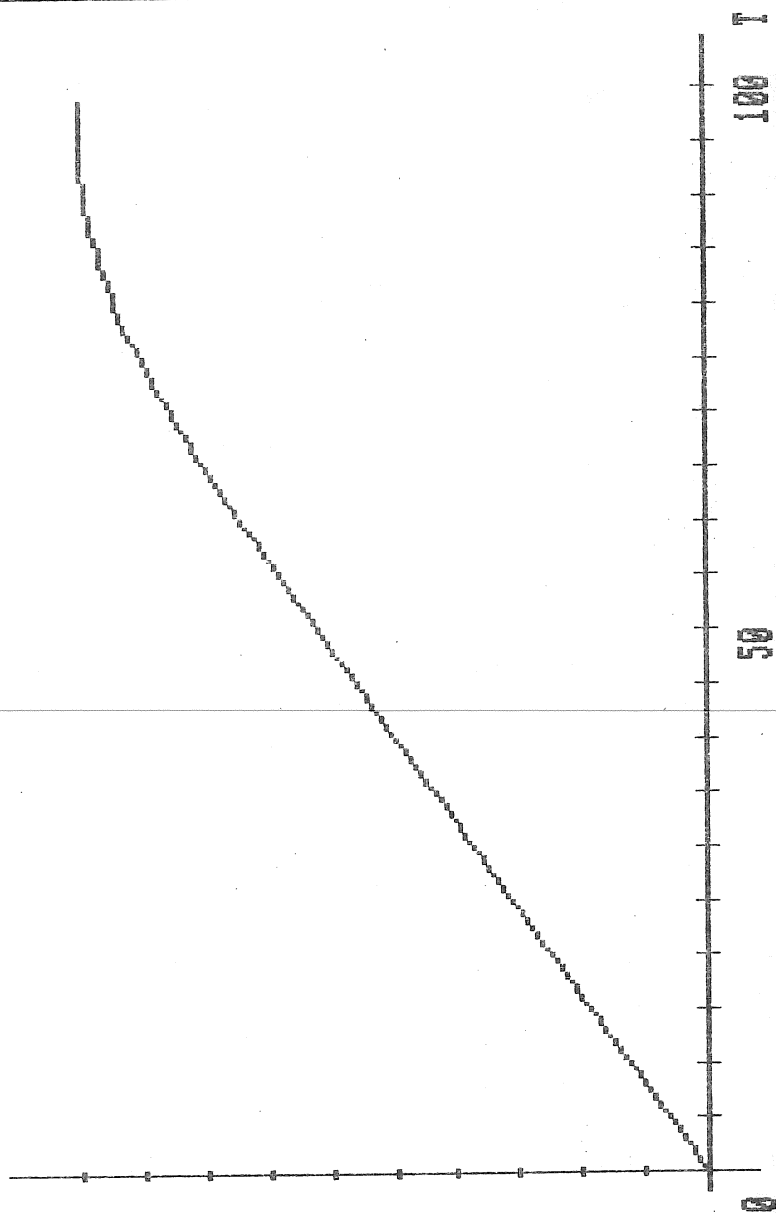
$$\|Y^h - Y\| \leq Ch^2$$

Referencias

- [1] Barron, E. N. & Jensen, R. & Malliaris, A. G. "Minimizing a quadratic payoff with monotone controls" (1986) *Mathematics of Operations Research* Vol 12, N° 2, May 1987.
- [2] Aragone, L. S. & González, R. L. & Tidball, M. M. "Teoría de Juegos Diferenciales con Controles Monótonos". Aceptado para ser presentado en el Séptimo Congreso Brasileiro de Automática. 15- 19 Agosto 1988 São José Dos Campos- Brasil
- [3] Aragone, L. S. & González, R. L. & Tidball, M. M. "Solución numérica de Juegos Diferenciales " Rapport de Recherche INRIA. En preparación.
- [4] Ciarlet, P.G. & Raviart, P.A. "Maximum principle and uniform convergence for the finite element method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2 (1973), 17-31
- [5] Gonzalez, R. L. & Medina, M. A.(1987) "Sobre la solución numérica de un problema de control óptimo de una difusión bidimensional" *Anales del 5º Encuentro Nacional de Investigadores y Usuarios del Método de Elementos Finitos* (Por aparecer en *Mecánica Computacional* Vol. VI, EUDEBA)
- [6] Ciarlet, P. G. (1969) "Discrete maximum principle for finite-difference operators" *Aequationes Mathematicae* Vol 4 fasc 3, 1970, pág 338-352.
- [7] González, R. L. & Rofman, E. (1987) "Stochastic control problems: an algorithm for the value function and the optimal policy. Some applications." *Proceedings of 13th IFIP Conference on Systems Modelling and Optimization*, Tokio, Aug.31-Sept 4
- [8] González, R. L. & Rofman, E. (1985) "On deterministic control problem: an approximation procedure for the optimal cost". Parts I and II, *SIAM J. Control and Opt.*, 23, 2 (1985) 242-266 and 267-285.
- [9] González, R. L. & Rofman, E. "Computational methods in scheduling optimization", *Fermat Days 85: Mathematics for Optimization* 135-155
- [10] Protter, M. H. (1977) "A first course in real analysis", Springer Verlag, New York.
- [11] Lions, J.L. & Stampacchia, G. (1967) "Variational inequalities" , *Comm. Pure Applied Math.*, 20, 493-519.

GRAFICA I

MAXIMO = +.201E+01 MINIMO = +.000E+00 VALOR FINAL = +.200E+01



GRAFICA II

MAXIMO = + 0000:00 VALOR FINAL = + 0000:00

MINIMO = - 7378-02

00+3000' = 0417:04

